

2. CÀLCUL DIFERENCIAL

1. Siguin $f(x) = x^2 + 1$ i $g(x) = (x + 1)^2$. Calculeu:

1. $f(0)$

7. $g(0)$

2. $f\left(\frac{1}{4}\right)$

8. $g(4)$

3. $f\left(\frac{1}{3}\right)$

9. $g\left(\frac{1}{4}\right)$

4. $f(\sqrt{5})$

10. $g\left(\frac{1}{3}\right)$

5. $f(\alpha)$

11. $g(\sqrt{5})$

6. $f(\alpha\beta)$

12. $g(\alpha\beta)$

2. Feu el mateix que a l'exercici anterior per les funcions $f(x) = \sqrt{x^2 - 3}$ i $g(x) = \frac{1}{x^2 - 5}$

3. Considera les funcions $f(x) = x^2 + 3$ i $g(x) = 9 - 5x^2$. Digueu el resultat de:

(a) $(f + g)(x)$

(b) $(f - g)(x)$

(c) $(fg)(x)$

(d) $(f + g)(\sqrt{3})$

(e) $(f - g)(0)$

(f) $(fg)(\alpha)$

4. Donades les següents funcions:

$$f_1(x) = x$$

$$f_7(x) = x^2 + x$$

$$f_2(x) = x^2$$

$$f_8(x) = \sin x$$

$$f_3(x) = a x, \quad a \in \mathbb{R}$$

$$f_9(x) = \ln x$$

$$f_4(x) = e^x$$

$$f_{10}(x) = \ln(\ln x)$$

$$f_5(x) = e^{x^2+1}$$

$$f_{11}(x) = x^3$$

$$f_6(x) = \sqrt{x}$$

$$f_{12}(x) = x^4$$

Calculeu les composicions:

$$1. \quad h_1(x) = f_1(f_2(x))$$

$$4. \quad h_4(x) = f_4(f_5(f_6(x)))$$

$$2. \quad h_2(x) = f_3(f_8(x))$$

$$5. \quad h_5(x) = f_7(f_1(f_{10}(x)))$$

$$3. \quad h_3(x) = f_{10}(f_{12}(x))$$

$$6. \quad h_6(x) = f_6(f_9(f_9(x)))$$

5. Les funcions que heu obtingut en el problema anterior, tot composant funcions elementals, tenen sentit (domini) a tot $\mathbb{R}$? Sempre es poden compondre dues funcions?

6. Digueu de quina forma “descomposem” les funcions següents (amb la notació problema 4):

$$(a) \quad h(x) = \ln(\ln x)$$

$$(b) \quad h(x) = e^{\sin x}$$

$$(c) \quad h(x) = \sqrt{x^2 + 1}$$

$$(d) \quad h(x) = \sqrt{\ln(x^2)}$$

$$(e) \quad h(x) = x e^{e^x}$$

7. Calculeu els dominis de les següents funcions:

(a) $f(x) = \frac{x}{\ln x}$

(b) $f(x) = \sqrt{x-1}$

(c) $f(x) = \sqrt{\ln(4-x^2)}$

(d) $f(x) = e^{\frac{1}{x}}$

(e) $f(x) = \ln(x^2)$

(f) $f(x) = \frac{x+1}{x^2-1}$

(g) $f(x) = e^{x^2+1}$

(h) $f(x) = \sin x \cos x$

(i) $f(x) = \sqrt{-(x-1)^2}$

8. Dibuixeu la gràfica d'una funció en $x = 0$ prengui el valor 0, que en $x = 1$ prengui el valor 9 i que en $x = -1$ prengui el valor -9 . Quantes funcions hi ha que compleixin aquesta propietat?

9. Feu un esbós (dibuix aproximat) de les gràfiques de les següents funcions:

(a) $f(x) = ax, a \in \mathbb{R}$

(b) $f(x) = 2x + a, a \in \mathbb{R}$

(c) $f(x) = x^3$

(d) $f(x) = e^x$

(e) $f(x) = x^n, n \in \mathbb{N}$

(f) $f(x) = \frac{1}{x^n}, n \in \mathbb{N}$

10. Considereu la gràfica de la funció $f(x) = x^2$. Usant això doneu la gràfica de les següents funcions $g(x)$, on c és un nombre real que pot ser positiu, negatiu o zero. Per començar podeu considerar els casos $c = -2$, $c = -1$, $c = 0$, $c = 1$, $c = 3$.

(a) $g(x) = f(x) + c$

(b) $g(x) = f(x + c)$

(c) $g(x) = c f(x)$

(d) $g(x) = \frac{1}{f(x)}$

(e) $g(x) = f\left(\frac{1}{x}\right)$

(f) $g(x) = \max\{f(x), 0\}$

(g) $g(x) = \min\{f(x), 0\}$

11. Repetiu l'exercici anterior per a les funcions $f(x) = x^3$, $g(x) = e^x$ i $h(x) = e^{-x}$.

12. Digueu quines de les funcions que descrivim a continuació són contínues tot donant una justificació.

(a) Definim la funció $F(t)$ que a cada instant de temps t ens diu el nombre de fills que té una persona determinada.

(b) Definim la funció $T(t)$ que a cada instant de temps t ens indica la temperatura corporal d'una persona determinada.

(c) Suposem que un avió vola en línia recta, sempre a la mateixa alçada respecte el nivell del mar i a velocitat constant. La funció $H(t)$ indica per a cada instant de temps t la distància vertical entre l'avió i el terra.

13. Tot sabent que la suma i composició de funcions contínues en un domini són també funcions contínues en aquest domini, argumenteu que les funcions següents són contínues i doneu els dominis en els quals això és així.

- | | |
|------------------------------------|-----------------------------|
| 1. $f(x) = x^2 + e^x$ | 5. $f(x) = e^{\sin x}$ |
| 2. $f(x) = \sin x + \cos x$ | 6. $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$ |
| 3. $f(x) = x^2 + \sqrt{x} + \ln x$ | 7. $f(x) = \sqrt{\ln(x^2)}$ |
| 4. $f(x) = \ln(\ln x)$ | 8. $f(x) = e^{\ln(\sin x)}$ |

14. Calculeu els següents límits:

- | | |
|---|---|
| 1. $\lim_{x \rightarrow -2} 3x^2 - 5x + 8$ | 7. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - 4}{x - 2}$ |
| 2. $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x^2 - 4}{x - 2}$ | 8. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 - 4}{x - 2}$ |
| 3. $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^2 - 4}{x - 2}$ | 9. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3}{x^2 - 1}$ |
| 4. $\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{x}$ | 10. $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3}{x^2 - 1}$ |
| 5. $\lim_{x \rightarrow 0} e^{x+1}$ | 11. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3}{x^2 - 1}$ |
| 6. $\lim_{x \rightarrow 2} e^{x^2-4} - 2$ | 12. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3}{x^2 - 1}$ |

15. Per a quins valors de a , $a \in \mathbb{R}$ les següents funcions són contínues a tot el seu domini?

- (a) $f(x) = \begin{cases} ax - 1, & x \leq 1 \\ 3x^2 + 1, & x > 1 \end{cases}$
- (b) $f(x) = \begin{cases} x + a, & x \leq 2 \\ 5x + 2 - x^2, & x > 2 \end{cases}$

16. Sigui f la funció donada per:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 2, & x < 0 \\ mx + n, & 0 \leq x \leq 2 \\ -3x^2 + 15, & x > 2 \end{cases}$$

Definiu $f(x)$ com una funció lineal en $[0, 2]$ de manera que sigui contínua a tot el seu domini.

17. Calculeu la funció derivada de les següents funcions:

- | | |
|---|--|
| 1. $f(x) = x^3 + 2x^2 + 1$ | 10. $f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2}$ |
| 2. $g(z) = \frac{3z - 1}{2z - 3}$ | 11. $f(x) = 5 - 17x^2 + \frac{e^x}{x}$ |
| 3. $f(x) = \frac{2x}{x^2 - 1}$ | 12. $g(y) = y^7 - \frac{2y^5}{3} + \frac{y^4}{5} - 2y^3 + 5$ |
| 4. $f(x) = x^6 + e^x + \sqrt{x}$ | 13. $f(x) = \frac{x^3}{x^2 - 1}$ |
| 5. $f(x) = x^4 - 2 - \frac{3}{x} + \frac{6}{x^3}$ | 14. $h(y) = \frac{y^4}{4} - 2y^3 + 5$ |
| 6. $g(z) = \frac{1}{2z - 3}$ | 15. $f(z) = \frac{z + e^z}{z}$ |
| 7. $f(x) = \frac{3}{x^2 - 1}$ | 16. $f(x) = 3e^x(2 - e^x)$ |
| 8. $f(x) = (x^2 + 2)(x + 1)$ | 17. $f(t) = 3t(5t + 1)(7t + 2)$ |
| 9. $f(x) = 10(5x - 1)(7x^2 + 2)$ | 18. $f(x) = 3e^x(2 - x)$ |

18. Donades les funcions $f(x) = (x + 1)^2$ i $g(x) = x^3$. Calculeu:

(a) $(f \circ g)'(x)$

(b) $(g \circ f)'(x)$

19. Calculeu la funció derivada de les següents funcions:

- | | |
|--|---|
| 1. $f(x) = (x^2 - 2)^3$ | 9. $f(x) = e^{\sqrt{3x-2}}$ |
| 2. $f(x) = e^{x^2-4} - 2$ | 10. $f(x) = e^{x-1} - e^{x-x^2}$ |
| 3. $f(x) = \frac{e^{x-1} - e^{(1-x)}}{34}$ | 11. $f(t) = \ln(t^2 + 3t + 1)$ |
| 4. $f(x) = e^{x^2-3} + \sqrt{x+9}$ | 12. $f(x) = e^{x^2-4} - 2e^{x^3} + 10e^x$ |
| 5. $f(x) = \frac{1}{(x+3)^5}$ | 13. $f(x) = e^{x+1} - \ln(x^2 + 1)$ |
| 6. $f(x) = e^{x^5-4} - 2$ | 14. $f(x) = \ln\left(\frac{1}{x^2 + 1}\right)$ |
| 7. $f(x) = \ln\left(\frac{x-5}{x-2}\right)$ | 15. $f(x) = \ln^2 x - \ln(x+1)$ |
| 8. $f(x) = e^{2x+1} + \ln\left(\frac{1}{x^2}\right)$ | 16. $f(x) = \ln\left(\sqrt{\frac{1}{x^2 + 1}}\right)$ |

20. Quina relació hi ha entre el signe de la derivada d'una funció i el fet que aquesta sigui creixent o decreixent?

21. Trobeu els intervals de creixement/decreixement i localitzeu els punts candidats a màxim o mínim de les següents funcions:

- (a) $f(x) = 3x^2 - 2x + 1$
- (b) $f(x) = x^3 - 12x + 1$
- (c) $f(x) = \frac{x-1}{x-2}$
- (d) $f(x) = x e^x$
- (e) $f(x) = \frac{2+x}{1-x}$
- (f) $f(x) = x^4 - 8x^3 + 18x^2 - 16x + 5$